問題

面積 1 の正三角形 A_0 からはじめて，図のように図形 $A_1, A_2, \cdots$ を作る。

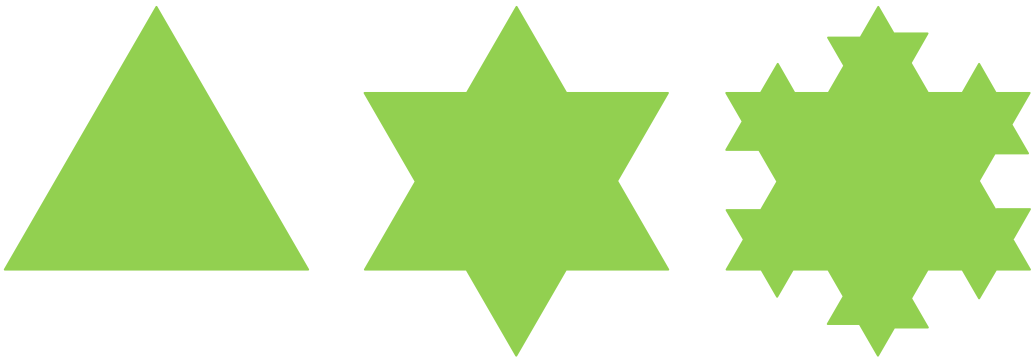
ここで， A_n は A_{n-1} の各辺の三等分点を頂点にもつ正三角形を A_{n-1} の外側につけ加えてできる図形である。

このとき，次の問いに答えよ。

(1) 図形 A_n の辺の数を求めよ。

(2) 図形 A_n の面積を S_n とするとき， $\lim_{n\to\infty} S_n$ を求めよ。

（香川大学）結構有名な問題



A_0 A_1 A_2

解

(1)

図形 A_{n+1} は，

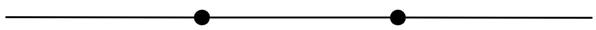
図形 A_n の各辺上に，その 3 等分点を頂点とする正三角形を 1 個追加した図形である。

図形 A_n の辺の数を a_n とすると，各辺の数が 4 倍になるから，

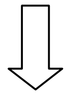
$a_{n+1}=4a_n$

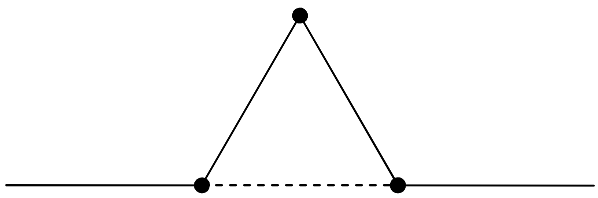
よって，a_n は初項 $a_0=3$，公比 4 の等比数列である。

ゆえに，$a_n=3\cdot 4^n$



1 辺が 4 辺になる。





(2)

正三角形がつけ加えられるたびに，つけ加えられる正三角形の辺の長さが $\frac{1}{3}$ 倍になるから，

正三角形がつけ加えられるたびに，つけ加えられる正三角形の面積は $\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{9}$ 倍になる。

図形 A_n の面積を S_n とすると，

図形 A_1 ができるとき，つけ加えられる正三角形 1 個の面積は，$\frac{1}{9}S_0$

図形 A_2 ができるとき，つけ加えられる正三角形 1 個の面積は，$\frac{1}{9}\times\frac{1}{9}S_0=\left(\frac{1}{9}\right)^2S_0$

図形 A_3 ができるとき，つけ加えられる正三角形 1 個の面積は，$\frac{1}{9}\times\left(\frac{1}{9}\right)^2S_0=\left(\frac{1}{9}\right)^3S_0$

$\vdots$

図形 A_n ができるとき，つけ加えられる正三角形 1 個の面積は，$\left(\frac{1}{9}\right)^nS_0$

よって，
図形 A_{n+1} ができるとき，

図形 A_n につけ加えられる正三角形 1 個の面積＝$\left(\dfrac{1}{9}\right)^{n+1}S_0$

図形 A_n につけ加えられる正三角形の個数＝図形 A_n の辺の数＝$a_n=3\cdot 4^n$
また，条件より $S_0=1$
よって，

$$S_{n+1}=S_n+\left(\frac{1}{9}\right)^{n+1}S_0\times 3\cdot 4^n$$
$$=S_n+\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{4}{9}\right)^n$$

ここで，

$b_n=S_{n+1}-S_n=\dfrac{1}{3}\cdot\left(\dfrac{4}{9}\right)^n$ （$n=0,1,2,\cdots$）とおくと，b_n は S_n の階差数列だから，

$$S_n=S_0+\sum_{k=0}^{n-1}b_k$$
$$=S_0+\sum_{k=1}^{n}b_{k-1}$$
$$=S_0+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{4}{9}\right)^{k-1}$$
$$=S_0+\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{4}{9}\right)^{k-1}$$
$$=1+\frac{1}{3}\cdot\frac{1-\left(\frac{4}{9}\right)^n}{1-\frac{4}{9}}$$
$$=1+\frac{3}{5}\left\{1-\left(\frac{4}{9}\right)^n\right\}$$

ゆえに，

$$\lim_{n\to\infty}S_n=1+\frac{3}{5}=\frac{8}{5}$$

補足

実際に問題を解くときは数字を代入し，問題を具体化して考え進めること。

これはすべての問題について言える。